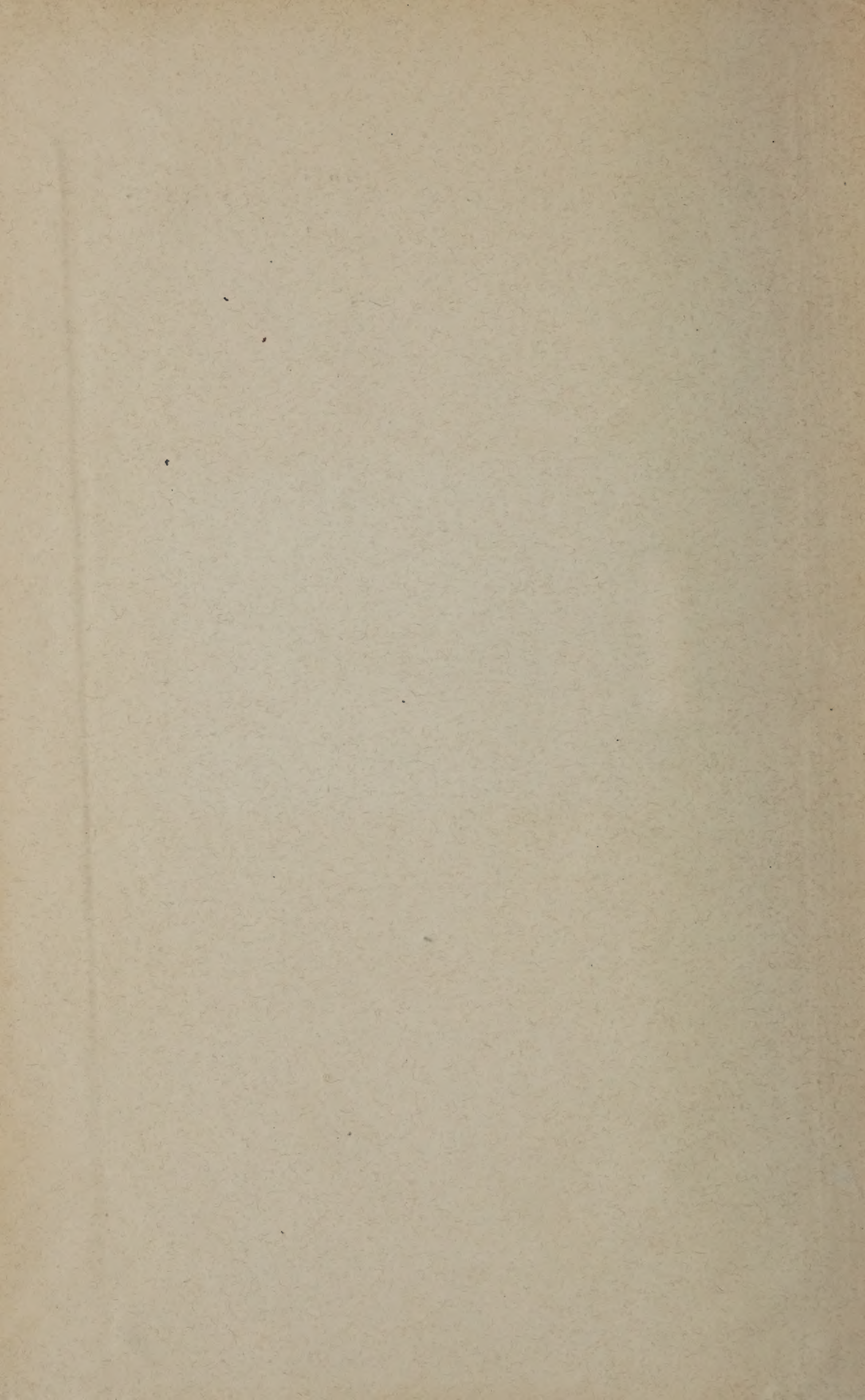




IMAGINÄRE KEGELSCHNITTE.

EINE GEOMETRISCHE STUDIE

ÜBER DAS

WESEN UND DIE KATOPTRISCHE DEUTUNG

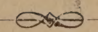
DES

IMAGINÄREN

VON

ADALBERT BREUER,
k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirke Wiens.

(Mit einer Figurentafel.)



ERFURT 1892.
VERLAG VON BODO BACMEISTER.

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

In Fig. 1 seien AB und CD zwei conjugierte Durchmesser einer Ellipse und MN eine zu CD parallele Sehne vom Centrum X. Vervollständigt man das Sehnenviereck $AMBN$, so bilden die Diagonalpunkte X, M_1 und N_1 desselben bekanntlich ein Tripel conjugierter Pole und die Diagonalen XM_1, M_1N_1 und N_1X ein Polarendreiseit.

Die Involution harmonischer Pole auf XX' vom Centrum X liefert bei P eine Involution harmonischer Polaren als Schein. Da zu X der unendlich ferne Punkt X' gehört, so ist der zu PX conjugierte Strahl, d. h. die Polare PX_1' von X zu XX' parallel. Die Involution auf XX' besitzt die reellen Deckpunkte $M = M'$ und $N = N'$, und sie ist daher hyperbolisch. Dasselbe gilt von der Strahleninvolution bei P, welche die reellen Doppelstrahlen $PM = PM'$ und $PN = PN'$ aufweist, die zugleich Ellipsentangenten sind.

Ist y^2 die Potenz der Punktinvolution, so hat man

$$XU \,.\, XU' = y^2 \quad \text{und} \quad XM = - XN = y.$$

Demgemäß liegen je zwei entsprechende Punkte, wie U und U' vom Centrum X aus auf derselben Seite, und die Paare trennen sich nicht. Die in Bezug auf X symmetrischen Punkte M_i und M_i' sind deshalb imaginär; sie sind bestimmt durch

$$XM_i = - XM_i' = iy.$$

Die Achsen der Strahleninvolution um P halbieren die beiden Winkel zwischen PM und PN, und sie gehen nur dann durch X und X', wenn AB und CD die Achsen der Ellipse sind.

Die Involution harmonischer Pole auf X_1X_1' liefert bei P_1 eine Involution conjugierter Polaren als Schein, welche wie die erstere elliptisch ist; denn sowohl die Deckpunkte $M_{i1} = M_{i1}'$ und $N_{i1} = N_{i1}'$, als auch die Doppelstrahlen $P_1M_{i1} = P_1M_{i1}'$ und $P_1N_{i1} = P_1N_{i1}'$ sind imaginär. X_1 ist das Centrum der Punktinvolution, und ihm entspricht der unendlich ferne Punkt X_1'. Ist $-y_1^2$

*

die Involutionspotenz, so besteht in Bezug auf zwei homologe Punkte U_1 und U_1' die Relation

$$X_1U_1 \,.\, X_1U_1' = -\,y_1{}^2. \quad \text{Ferner ist } X_1M_{i1} = -\,X_1M'_{i1} = iy_1.$$

Mithin liegen die Punkte eines Paares zu beiden Seiten des Centrums X_1, und die Paare trennen sich gegenseitig. Demzufolge gibt es hier ein symmetrisches Doppelpaar $M_1 = N_1'$ und $N_1 = M_1'$; dasselbe ist bestimmt durch

$$X_1M_1 = -\,X_1M_1' = y_1.$$

Da diese äquidistanten Punkte, absolut genommen, denselben Abstand von X_1 haben, wie die imaginären Doppelpunkte, so dienen sie zur Versinnlichung der letzteren. Ebenso werden die imaginären Doppelstrahlen durch die Strahlen P_1M_1 und P_1M_1' veranschaulicht, welche jedoch von den symmetrischen Strahlen der Involution wohl zu unterscheiden sind.

Denn die Symmetrieverhältnisse eines involutorischen Büschels gehen beim Schneiden mit einer Geraden nur dann auf die entstehende Punktinvolution über, wenn die Gerade zu einer Achse der Strahleninvolution senkrecht steht. Diese Achse liefert dann das Centrum der Punktinvolution. Sonst wird das Centrum allgemein von jenem Strahle erzeugt, dessen conjugierter Strahl zur Geraden parallel ist. Die symmetrischen Punkte werden durch ein anderes Paar der Strahleninvolution herausgeschnitten, welches von dem symmetrischen Strahlenpaare verschieden ist.

Die Achsen der Strahleninvolution um P_1, welche als Rechtwinkelpaar derselben zu construieren wären, halbieren die Winkel zwischen den imaginären Deckstrahlen und daher auch jenen zwischen den symmetrischen Strahlen; sie sind daher nur dann mit P_1X_1 und P_1X_1' identisch, wenn AB und CD die Achsen der Ellipse vorstellen.

Man bemerkt, dass die Involutionen auf XX' und X_1X_1' gewissermaßen perspectivisch liegen. Jedoch treten hier, der Natur der Sache entsprechend, zwei Projectionscentren A und B auf. Dabei entsteht aus jedem Paare UU' das homologe U_1U_1', indem man den ersten Punkt aus A, den andern aber aus B projiciert. Da $V' = U$ und $V = U'$ ein zweites Paar repräsentirt, so erhält man durch umgekehrtes Projicieren aus B und aus A noch ein zweites Paar V_1V_1'.

Da M, B und N_1 in einer Geraden liegen, so gehen die Polaren dieser Punkte, nämlich MP, BT und M_1P_1 durch denselben Punkt $R = R_1$, den Pol von MB. In gleicher Weise erkennt man, dass sich NP, BT und N_1P_1 in demselben Punkte $S = S_1$ von BT schneiden. Ferner erblickt man in AB leicht die Involution mit den reellen Doppelpunkten $A = A_1$ und $B = B_1$; darin ist XX_1 oder P_1P ein Paar. $O = Q_1$ ist das Centrum, und ihm entspricht der unendlich ferne Punkt $O_1 = Q$.

Nun ist die Frage nach dem geometrischen Orte von M_1 leicht zu entscheiden. Wählt man A als Centrum und BT als Achse einer Collineation, und ordnet man B sich selbst zu, so ist dieselbe bestimmt. Denn die Gegenachsen $OO' = Q_1Q_1'$ dieser Verwandtschaft gehen dann beide durch O und parallel zu BT. Die Collineation ist eine involutorische, weil jedem Punkte der Ebene derselbe Punkt entspricht, ob nun der erstere dem einen oder dem andern Systeme angehört. So ist $X = P_1$ und $X_1 = P$. Da das Centrum einer jeden Collineation sich selbst entspricht, so sind $A = A_1$ und $B = B_1$ die Doppelpunkte der Involution. Ihr Abstand wird durch das Paar XX_1 harmonisch getrennt, und deshalb heißt die Collineation auch eine harmonische.

M und M_1 sind zwei collineare Punkte, und da der Ort von M eine Ellipse ist, so ist der Ort von M_1 ein Kegelschnitt. Der Tangente MP entspricht die Curventangente M_1P_1, und beide treffen sich im Punkte $R = R_1$ der Collineationsachse. Weil ferner dem Durchmesser CD der Ellipse die unendlich ferne Sehne C_1D_1 des Kegelschnittes homolog ist, so kann dieser nur eine Hyperbel sein. Dem unendlich fernen Pole Q von CD entspricht das Ellipsencentrum Q_1, und durch dieses gehen die Asymptoten. Außerdem begegnen sich die letzteren mit den Tangenten CQ und DQ in den Punkten $W = W_1$ und $Z = Z_1$ der Collineationsachse. Damit stimmt die bekannte Construction der Asymptoten als Diagonalen eines Parallelogrammes, dessen Symmetralen (in schiefer Beziehung) conjugierte Durchmesser sind.

Die Hyperbel hat also mit der Ellipse die conjugierten Diameter AB und CD gemein. Geht die Ellipse in einen Kreis über, so ist $HIZW$ ein Quadrat, und die Asymptoten sind normal zu einander. Die Hyperbel ist diesfalls gleichachsig oder gleichseitig.

Rückt das Collineationscentrum A in der Richtung OA ins Unendliche, so fällt auch $O = Q_1$ ins Unendliche, und beide Curven degenerieren in Parabeln, die sich in B berühren. Es ist dann

$XB = BX_1$, und die Parabeln sind in centraler Symmetrie in Bezug auf den Punkt B. Die Involution in AB ist diesfalls gleichseitig hyperbolisch.

Da X und X_1 conjugierte Pole sind, so ist

$$OX \,.\, OX_1 = \overline{OB}^2, \quad \text{oder} \quad x \,.\, x_1 = a_1^2. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Weil $MY \,||\, BO$ die Polare von Y' ist, so sind Y und Y' conjugierte Pole, und man hat daher

$$OY \,.\, OY' = \overline{OC}^2, \quad \text{oder} \quad y \,.\, OY' = b_1^2. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Ferner folgt aus Fig. 1 die Proportion

$$OY' : XM = OX_1 : XX_1, \quad \text{oder} \quad OY' : y = x_1 : x_1 - x \,. \quad (3)$$

Setzt man für x_1 und OY' aus 1) und 2) die Werte, so resultiert

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

als analytische Gleichung der Ellipse. Da YM durch den unendlich fernen Punkt Q geht, entspricht dieser Geraden der Hyperbelradius Q_1M_1. Weil aber Y in der Gegenachse liegt, so ist Y_1 unendlich fern; demnach ist $AY \,||\, Q_1M_1$. Hieraus ergibt sich die Proportion

$$OY : X_1M_1 = AO : OX_1, \quad \text{oder} \quad y : y_1 = a_1 : x_1. \quad \ldots \quad (5)$$

Analog erhält man aus der Figur wegen $OM \,||\, AE_1$ oder aus 5) mittels 1)

$$XM : Q_1E_1 = OX : AQ_1, \quad \text{oder} \quad y : y_1 = x : a_1. \quad \ldots \quad (6)$$

Substituiert man in 4) für x den Wert aus 1) und für y den Wert aus 5), so folgt

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

als Gleichung der Hyperbel.

In Anbetracht dessen, dass man die imaginären Ellipsenpunkte M_{i1} und $M_i'{}_1$ durch die reellen Hyperbelpunkte M_1 und M_1' veranschaulichen kann, und ebenso die imaginären Ellipsentangenten P_1M_{i1} und $P_1M_i'{}_1$ durch die Hyperbeltangenten P_1M_1 und P_1M_1', so zeigt uns die Hyperbel den Verlauf der imaginären Ellipsenpunkte, wenn die Secante X_1X_1' die Strecke AB nicht schneidet. Die Asymptoten der Ellipse sind imaginär. Da ihre Richtung be-

züglich der Achsen durch das Verhältnis der letzteren bestimmt ist, und, weil ähnliche Ellipsen das gleiche Achsenverhältnis besitzen, so gelangt man zu dem Satze:

Alle ähnlichen und zugleich perspectivisch liegenden Ellipsen gehen durch dieselben zwei unendlich fernen, aber imaginären Punkte der Ebene.

Für den Kreis specialisiert sich obiger Satz, weil man der unendlichen fernen Geraden der Ebene keine bestimmte Richtung beilegt, folgendermaßen:

Alle Kreise gehen durch dieselben zwei unendlich fernen, imaginären Punkte der Ebene. Die letzteren sind die Enden der imaginären Doppelstrahlen der rechtwinkligen Involution harmonischer Polaren um das Centrum und heißen die Kreispunkte der Ebene.

Die Fig. 1 gestattet aber auch die umgekehrte Auffassung. Ist die Hyperbel reell, so zeigt die Ellipse den Verlauf der imaginären Hyperbelpunkte M_i und N_i, wenn die Secante XX' die Strecke AB schneidet. Die imaginären Hyperbeltangenten PM_i und PN_i werden durch die Ellipsentangenten PM und PN vertreten. Der Secante OO' entsprechen die imaginären Hyperbelpunkte C_i und D_i, welche durch C und D versinnlicht sind. Die Hyperbeltangenten durch den unendlich fernen Punkt Q werden durch CW und DZ dargestellt.

Mit diesem Ersatze gewinnt die Lehre vom Imaginären den Boden der Anschaulichkeit. Die Beziehungen imaginärer Elemente erscheinen als Ausdruck der Lagenverhältnisse der entsprechenden reellen Elemente in der collinearen Figur. Da zu jedem Diameterpaare ein imaginärer Kegelschnitt gehört, so erkennt man die unendlich große Mannigfaltigkeit des Imaginären.

Jeder Kegelschnitt erscheint als Enveloppe unzählig vieler, ihm umschriebener, imaginärer Kegelschnitte, die ihn von außen berühren und mit ihm concentrisch sind.

Die von der concaven Seite des reellen Kegelschnittes umschlossene Fläche enthält keine imaginären Punkte. Hiemit stellt jeder reelle Kegelschnitt zugleich ein ganzes Gewebe imaginärer Kegelschnitte dar, und damit erschließt sich dem geistigen Auge ein ganz neues, äußerst umfangreiches Gebiet für die Speculation an imaginären Gebilden.

Dass das bisher Gesagte nicht auf bloßen Fictionen beruht, wird sofort klar, wenn man eine Ellipse (Fig. 2) in einem Hohlspiegel HH' betrachtet, der das eine Ende A der großen Achse zum Krümmungsmittelpunkte hat und dessen Scheitel in das andere Ende B der Achse fällt. Dann ist das Ellipsencentrum O der Brennpunkt des Spiegels, und die Ellipse bildet sich zur Hälfte, nämlich von B bis C und D virtuell als halbe Hyperbel ab, während der Theil CAD die andere Hälfte der Hyperbel als Luftbild liefert. Die bekannte optische Construction erweist sich analog dem Ergebnisse der Collineation. Zugleich erkennt man die Ursache der sphärischen Abweichung, denn die Punkte $R = R_1$ und $S = S_1$ liegen hier in der Scheiteltangente BT, während sie sich in Wirklichkeit in der Spiegelfläche HH' befinden. Die obige Demonstration des Imaginären ist ungemein packend und sollte für Unterrichtszwecke ausgenützt werden. Würde man die Ellipse in einem Hohlspiegel betrachten, dessen Scheitel in C und dessen Centrum in D liegt, so käme die Nebenhyperbel der vorigen zum Vorscheine, welche aber wegen der diesmal stark ins Gewicht fallenden sphärischen Abweichung bedeutend verzerrt erschiene.

Für die Parabel (Fig. 3) genügt ein Planspiegel, der im Scheitel B auf der Achse senkrecht steht. Analog kann man auch andere optische Erscheinungen, wie z. B. Linsenwirkungen, geometrisch auswerten.

Mit dieser neuen Auffassung des Imaginären verliert dasselbe alles Unbegreifliche, und es ist klar, dass man auf Grund von Speculationen an dem Imaginären zu Resultaten für das Reelle kommen muss. Denn das Studium eines Spiegelgebildes kann doch ganz gut auf das Original zurückbezogen werden. So lässt sich manche neue Construction auffinden, welche auf die Existenz des Imaginären gestützt, aber doch reell ausführbar ist. Um diese Behauptung zu erhärten, mögen aus Fig. 1 noch einige Schlüsse gezogen werden.

Die Involution conjugierter Polaren bei P_1 besitzt ein Rechtwinkelpaar, und es kann nun die Frage aufgeworfen werden, für welche Punkte von AB dieses Achsenpaar die Hyperbel tangiert. Da $AY' \,||\, P_1M_1$ ist, so braucht man bloß $OY' = OA$ zu machen. Denn ist $M_1P_1N_1$ (Fig. 4) ein rechter Winkel, so ist $PP_1 = PM_1 = PN_1$, oder $x_1 - x = y_1$. Hieraus würde der Analytiker mit Hilfe von 5), 1) und 4) x bestimmen. Aus der Fig. 4 folgt aber rascher, weil $OY \,.\, OY' = b_1^2$ und $OY' = a_1$ ist, $y = b_1^2 : a_1$. Dies in 4) eingesetzt, ergibt sofort mit Rücksicht auf einen bekannten Satz

$$x^2 = a_1^2 - b_1^2 = a_h^2 - b_h^2 = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hierin sind a_h und b_h die entsprechenden Halbachsen der Hyperbel. Auf Grund dieser Rechnung findet man also P_1 leicht, indem man LL' tangierend an den mit OD als Radius beschriebenen Kreis und parallel zu AB zieht, mit dem über AB als Durchmesser gezeichneten Kreise in L' zum Schnitte bringt und $L'P_1$ normal zu AB fällt.

Rein geometrisch findet man die eine Ellipsentangente durch Y', indem man den conjugierten Punkt Y gemäß $OY \cdot OY' = b_1^2$ construiert und die Polare von Y', nämlich $YK \parallel AB$ zieht. Legt man ferner $Y'K \parallel HO$, so befindet sich der Pol K' dieser Geraden in YK und in der Polare des unendlich fernen Punktes J von OH. Diese ist aber der zu OH conjugierte Diameter OI. Somit sind K und K' ein Paar der Involution auf YK, und man findet M als einen der beiden Doppelpunkte aus $\overline{YM}^2 = YK \cdot YK'$. Nun ist $Y'M$ die gesuchte Tangente.

Der Analytiker würde den Tangentenpunkt P folgendermaßen bestimmen. Setzt man $OP = x_1 = X$ und $OY' = Y$, so sind $-1 : X = u$ und $-1 : Y = v$ die Liniencoordinaten der Tangente in M. Setzt man aus 1) und 2) die Werte in 4) ein, so folgt

$$\frac{a_1^2}{X^2} + \frac{b_1^2}{Y^2} = 1, \quad \text{oder} \quad a_1^2 u^2 + b_1^2 v^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

als die Gleichung der Ellipse in Liniencoordinaten, aus welcher X leicht zu berechnen ist.

Der Ort von P_1 ist nach 8) ein Kreis vom Centrum O, und dieser liefert in jedem Durchmesser zwei Punkte P_1 und P_1'' der geforderten Art. Doch ist der Radius des Ortskreises gemäß 8) nur dann reell, wenn $a_1 > b_1$ ist. Für $a_1 = b_1$ schrumpft der Ortskreis im Centrum O zusammen, und P_1M_1 sowie P_1N_1 sind dann Asymptoten der Hyperbel, welche diesfalls gleichachsig ist.

Ist AB die große Achse der Ellipse, so gibt der Ortskreis in derselben die Brennpunkte $P_1 = F$ und $P_1'' = G$. Denn die Involution der Polaren um F hat dann außer den schon oft erwähnten Achsen noch das Rechtwinkelpaar P_1P und P_1M; demzufolge sind aber alle Paare rechtwinklig, und die Involution ist circular. Die zu F gehörige Polare M_1N_1 heißt eine Directrix. Das Stück in jeder Ellipsentangente vom Berührungspunkte M bis zum Schnittpunkte U mit der Directrix wird vom Focus F aus

stets unter rechtem Winkel gesehen, denn FM und FU sind conjugierte Strahlen der Rechtwinkelinvolution.

Wird AB zur kleinen Achse der Ellipse, dann sind die Brennpunkte F_i und G_i wegen $a_h < b_h$ gemäß 8) imaginär. Dies gibt ein Beispiel für einen Winkel, welcher sowohl einen imaginären Scheitel als auch ebensolche Schenkel hat. Die Theorie der Brennpunkte unterscheidet bekanntlich noch ein drittes Paar, nämlich die Kreispunkte der Ebene. Nach dieser Theorie ercheinen die Brennpunkte als die Doppelelemente jener Involutionen, welche die Rechtwinkelstrahlen aller Involutionen harmonischer Polaren in den Achsen und der mit diesen ein Tripel bildenden unendlich fernen Geraden liefern.

Der Vollständigkeit wegen sei noch bemerkt, dass Ellipse und Hyperbel gleiche Parameter aufweisen, wenn sie dieselben Achsen besitzen.

Sucht man jene Punkte P und P'' von AB (Fig. 5), in welchen die Ellipsentangenten, also z. B. PM und PN auf einander senkrecht stehen, so macht man $OE_1' = OA$ und zieht durch E_1' die Hyperbeltangente $E_1'M_1$. Denn ist $MPN = 90^0$, so ist $P_1P = P_1M = P_1N$. Nun ist aber allgemein $MP \| AE_1'$, und damit ist die Richtigkeit der Construction erwiesen. Die Analysis würde $x_1 - x = y_1$ zum Ausgangspunkte nehmen und mittels 6), 1) und 7) x_1 berechnen. Besser ist es jedoch, zu beachten, dass E_1 und E_1' conjugierte Pole sind. Deshalb ist

$$OE_1 \,.\, OE_1' = -\overline{OC^2} \quad \text{oder} \quad y_1 \,.\, OE_1' = -b_1^2 \quad . \quad . \; (10)$$

Da $OE_1' = a_1$ gesetzt wurde, so findet man $y_1 = -b_1^2 : a_1$ und hiemit aus 7) unter Bezug auf einen bekannten Satz

$$x_1^2 = a_1^2 + b_1^2 = a_e^2 + b_e^2 = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \; (11)$$

Darin bedeuten a_e und b_e die Halbachsen der Ellipse, welche jedoch von jenen der Hyperbel in 8) im allgemeinen verschieden sind. Diesem Resultate entsprechend, zieht man $JJ' \| AB$ als Tangente des mit OD beschriebenen Kreises, errichtet $BJ' \perp AB$ und zeichnet mit OJ' als Radius den Kreis PP''.

Von der Analysis ganz unabhängig, findet man die Tangente $E_1'M_1$ auf nachstehende Art. Man sucht zu E_1' den conjugierten Punkt E_1 gemäß 10), zieht durch diesen die Polare von E_1', nämlich $E_1L' \| AB$. Sodann legt man $E_1'L' \| IO$ und sucht den Pol L dieser Geraden. Weil die letztere durch den unendlich fernen Punkt K

der Asymptote IO geht, und diese sich selbst conjugiert ist, so liegt L in IO; außerdem befindet sich L in E_1L'. Damit ist ein Paar der Involution in E_1L' gegeben, und man construiert M_1 als einen der Doppelpunkte gemäß $\overline{E_1M_1}^2 = E_1L \,.\, E_1L'$. Durch M_1 geht die fragliche Tangente.

Die analytische Geometrie würde wieder die Tangentenabschnitte $OP_1 = x = X$ und $OE_1' = Y$ benutzen uud diese mittels $-1 : X = u$ und $-1 : Y = v$ in Liniencoordinaten verwandeln. Durch Substitution von 1) und 10) in 7) folgt dann

$$\frac{a_1^2}{X^2} - \frac{b_1^2}{Y^2} = 1, \quad \text{oder} \quad a_1^2u^2 - b_1^2v^2 = 1. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Aus dieser Hyperbelgleichung ist X leicht zu entnehmen. Der geometrische Ort von P ist ebenfalls ein Kreis vom Centrum O: er schneidet aus jedem Durchmesser AB zwei Punkte P und P'' heraus, welche nach 11) immer reell sind.

Da AB zur reellen Achse der Hyperbel werden kann, so liefert der Ortskreis in dieser die Brennpunkte $P = F$ und $P'' = G$. Fasst man die Figur in umgekehrter Art auf, so dass die Hyperbel reell ist und die Ellipse den Verlauf der imaginären Hyperbelpunkte darstellt, so kann man bezüglich der Brennpunkte dieselben Schlüsse ziehen, wie vorhin, und erkennt die Involutionen conjugierter Polaren um die Brennpunkte als rechtwinklige. Auch findet man leicht die analogen Directrixeigenschaften. Die Brennpunkte in der imaginären Achse CD sind imaginär; denn die aus 11) folgenden reellen Brennpunkte entsprechen nämlich der Nebenhyperbel.

In Fig. 6 ist die gleichseitige Hyperbel analog dem Früheren die Collinearfigur des Kreises vom Radius $OM = r$. Für den imaginären Punkt M_{i1} erhält man aus dem bei P rechtwinkligen Dreiecke $M_{i1}PO$

$$PM_{i1} = y_{i1} = \sqrt{\overline{OM}_{i1}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{r^2 - x_1^2} = i\sqrt{x_1^2 - r^2}$$
$$= iy_1 = iPM_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Mithin erhält man den Punkt M_1 der Hyperbel, welcher dem imaginären Punkte M_{i1} entspricht, indem man von P aus den Orthogonalkreis MM_1 an den gegebenen construiert. Er hat die Tangente $PM = PM_1 = y_1$ zum Radius. Sämmtliche Orthogonalkreise bilden einen Büschel, dessen Träger die imaginären Punkte C_i und D_i sind, die auf der Nebenachse der Hyperbel liegen, welche die gemeinsame Chordale der Orthogonalkreise vorstellt. Jeder solche Kreis liefert in AB wegen $OM^2 = r^2 = OS \,.\, OS'$ ein Paar

SS' jener Involution, welche die Doppelpunkte A und B hat; dabei ist $SP = PS'$. Der Kreis über AB bestimmt in dem Durchmesser $M_1 N_1$ jedes Orthogonalkreises die imaginären Schnittpunkte M_{i1} und N_{i1}. Durch diese Punkte gehen noch unzählig viele Kreise, deren Centren auf AB liegen und welche bloß von dem einen Orthogonalkreise SS' rechtwinklig geschnitten werden. Sie haben mit dem Kreise AB die Chordale M_1N_1 gemein. Legt man durch S und S' einen Büschel von Kreisen, welcher dann die Centrale M_1N_1 hat, so wird der Büschel $M_{i1}N_{i1}$ von dem ersteren orthogonal geschnitten. Unter den Kreisen des Büschels $M_{i1}N_{i1}$ gibt es aber auch imaginäre, und zwar liegen deren Centren innerhalb SS'. Die Radienquadrate dieser Kreise sind die Potenzen ihrer Centren in Bezug auf den Kreis SS'. So z. B. erhält man für das Centrum P_1

$$P_1 M_{i1} = \sqrt{P_1P^2 - PM_1^2}.$$

Da aber aus der Figur

$$y_1^2 = PM_1^2 = OP \,.\, P_1P = x_1 \,.\, P_1P$$

folgt, so ergibt sich

$$P_1P = \frac{y_1^2}{x_1}; \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

hiemit erhält man weiter

$$P_1M_{i1} = \sqrt{\frac{y_1^4}{x_1^2} - y_1^2} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{y_1^2 - x_1^2}.$$

Da aber

$$y_1^2 = \overline{PM_1}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OM}^2 = x_1^2 - r^2$$

ist, so resultiert schließlich

$$P_1M_{i1} = i\,\frac{y_1}{x_1}\,r. \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Dieses Resultat kann man auch aus dem Dreiecke P_1PM_{i1} direct erhalten.

Bezeichnet man $\sphericalangle\, M_{i1}OP$ mit $i\varphi$ und $\sphericalangle\, M_{i1}P_1P$ mit $i\psi$, so erhält man analog der reellen Trigonometrie, da $OM_{i1} = r$ ist, mit Rücksicht auf 13), 14) und 15) unter Beachtung der Figur

$$\sin i\varphi = \frac{PM_{i1}}{OM_{i1}} = i\,\frac{y_1}{r} = i \operatorname{tg} \alpha, \qquad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$\cos i\varphi = \frac{OP}{OM_{i1}} = \frac{x_1}{r} = \sec\alpha, \quad \ldots \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} i\varphi = \frac{\sin i\varphi}{\cos i\varphi} = i\,\frac{y_1}{x_1} = i\sin\alpha, \quad \ldots \quad (18)$$

$$\sin i\psi = \frac{PM_{i1}}{P_1M_{i1}} = \frac{x_1}{r} = \sec\alpha, \quad \ldots \quad (19)$$

$$\cos i\psi = \frac{P_1P}{P_1M_{i1}} = -i\,\frac{y_1}{r} = -i\operatorname{tg}\alpha, \quad \ldots \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} i\psi = \frac{\sin i\psi}{\cos i\psi} = i\,\frac{x_1}{y_1} = i\operatorname{cosec}\alpha. \quad \ldots \quad (21)$$

Analog bildet man leicht die Ausdrücke für die Nebenfunctionen Secans, Cosecans und Cotangens. Aus 16) und 17), sowie aus 19) und 20) folgt

$$\sin^2 i\varphi + \cos^2 i\varphi = 1 \quad \text{und} \quad \sin^2 i\psi + \cos^2 i\psi = 1.$$

Somit gelten diese und auch die übrigen Grundformeln der Goniometrie auch für imaginäre Winkel. Für $r = 1$ hat man, da $P_1M = y = \sin\alpha$ ist,

$$\sin i\varphi = iy_1 = iPM_1, \quad \ldots \quad (16')$$

$$\cos i\varphi = x_1 = OP, \quad \ldots \quad (17')$$

$$\operatorname{tg} i\varphi = iy = iBT. \quad \ldots \quad (18')$$

Denn aus der Collineation folgt, dass $MT \,||\, OP$ und M_1T entsprechende Gerade sind und sich in der Collineationsachse BT schneiden müssen. Damit sind reelle Maße für die Functionen imaginärer Winkel gewonnen. Da

$$BT = \operatorname{tg}\varphi$$

ist, so erkennt man aus 18′) das Gesetz

$$\operatorname{tg} i\varphi = i\operatorname{tg}\varphi, \quad \ldots \quad (22)$$

welches für die Praxis der Goniometrie imaginärer Winkel von fundamentaler Bedeutung ist. Dieses Gesetz gilt allgemein, denn aus der Figur und aus 14) findet man

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{PM_1}{P_1P} = \frac{x_1}{y_1}$$

und erkennt daraus durch Vergleichung mit 21)

$$\operatorname{tg} i\psi = i\operatorname{tg}\psi.$$

Ferner ergeben sich für Winkel, welche kleiner als 45^0 sind, ohneweiters die Relationen

$$\sin(-i\varphi) = -\sin i\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

$$\cos(-i\varphi) = \cos i\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Weitere Schlüsse ergeben sich aus

$$\overline{PM}^2 = PM_1^2 = OP \, . \, PP_1.$$

Man erhält hieraus die Proportion

$$OP : M_1P = PM_1 : PP_1.$$

Aus dieser und aus $\sphericalangle OPM_1 = \sphericalangle M_1PP_1 = 90^0$ folgt $\Delta OPM_1 \sim \Delta M_1PP_1$. Daher ist $\sphericalangle M_1OP = \sphericalangle P_1M_1P$ oder $\varphi = \varphi_1$. Ferner ist $\sphericalangle PM_1O = \sphericalangle PP_1M_1$ oder $\psi_1 = \psi$. Da aber $\varphi + \psi_1 = 90^0$ und $\psi + \varphi_1 = 90^0$ ist, so ist auch $\varphi + \psi = 90^0$. Mithin findet man aus 16), 17), 19) und 20) für $\varphi < 45^0$ die Sätze:

$$\sin i(90^0 - \varphi) = \cos i\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

$$\cos i(90^0 - \varphi) = -\sin i\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

und für $\psi > 45^0$

$$\sin i(90^0 - \psi) = -\cos i\psi, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$\cos i(90^0 - \psi) = \sin i\psi. \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Damit ist die Basis für die Goniometrie imaginärer Winkel geschaffen. Über das Weitere gibt meine Abhandlung „Die goniometrischen Functionen complexer Winkel“ Aufschluss.

Noch sei bemerkt, dass die Winkel $OM_{i1}P = i\psi_1$ und $P_1M_{i1}P = i\varphi_1$ den Scheitel und einen Schenkel imaginär haben, während der andere Schenkel reell ist. Auch über diese Winkel ließen sich aus dem Vorstehenden leicht Formeln gewinnen.

Zum Schlusse möge noch der Verlauf der symmetrischen Punkte M_1 und M_1' (Fig. 7) der Involution harmonischer Pole in einer Geraden untersucht werden, wenn sich diese um den festen Punkt O_1 dreht. Als Kegelschnitt diene der Einfachheit wegen der Kreis vom Centrum O und dem Halbmesser r. Die Centrale $OO_1 = c$ ist dann der Durchmesser eines Hilfskreises, welcher den Ort des Centrums Q der Involution vorstellt. Legt man die Tangente QT an den Kreis O, so ist diese der Radius des Orthogonalkreises, welcher aus O_1Q die symmetrischen Punkte M_1 und M_1' der Involution herausschneidet. M_1' fällt nach O_1, wenn M_1 in der Polare

AB von O_1 liegt. Da Q in der Mitte von M_1M_1' sich befindet, so erhält man diesen besonderen Punkt Q_2 in der durch das Centrum H des Perpendikels O_1P zu AB zur letzteren Geraden gezogenen Parallelen. Bezeichnet man OQ mit n, so ergibt sich absolut

$$QM_1 = QM_1' = QT = \sqrt{n^2 - r^2}.$$

Wählt man O_1X_1 als Achse eines Polarcoordinatensystems, dann ist $\sphericalangle X_1O_1M_1 = \varphi$ die Amplitude und $O_1M_1 = \varrho$ der Vector des laufenden Punktes M_1. Weil $\sphericalangle O_1OQ = \varphi$ ist, so hat man

$$n = c \cos \varphi \text{ und } O_1Q = c \sin \varphi.$$

Ferner ist

$$O_1M_1 = O_1Q + QM \text{ und } O_1M_1' = O_1Q - QM_1';$$

hieraus ergibt sich die Polargleichung des geometrischen Ortes von M_1, nämlich

$$\varrho = c \sin \varphi \pm \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi - r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Auf das rechtwinklige Achsensystem O_1X_1Y bezogen, lautet die Gleichung der Curve

$$(x^2 + y^2)^2 + (r^2 - 2\,cy)(x^2 + y^2) - c^2(x^2 - y^2) = O \quad . \quad (30)$$

Die Curve ist also vom vierten Grade und könnte passend Pol-curve genannt werden. Sie besitzt den Pol O_1 als Doppelpunkt und zwei Inflexionspunkte auf den Theilen O_1A und O_1B. Ferner treten entsprechend den vier Culminationen zwei Doppeltangenten auf, welche zu O_1X_1 parallel laufen. Die beiden Schleifen berühren den Kreis O in A und B. An sonstigen Merkwürdigkeiten ist hervorzuheben, dass der ganze, aber imaginär genommene Kreis der Curve angehört. Außer diesem imaginären Kreise gibt es jedoch noch unzählig viele imaginäre Curven, welche die reelle umhüllen. Jeder Punkt der Ebene liefert als Träger eines Büschels von Secanten eine solche imaginäre Curve. Ersetzt man diese durch die entsprechende reelle Curve, so gewinnt man eine ganze Familie von krummen Linien. Somit kann die Lehre vom Imaginären dazu dienen, das Gebiet des Reellen äußerst mannigfach zu erweitern.

Bezieht man die Curve auf das Achsenkreuz XOY, so hat man in 30) die Substitutionen

$$y = y_1 + c \text{ und } x = x_1$$

zu vollführen und erhält nach gehörigem Heben

$$(x_1^2 + y_1^2 + 2\,cy_1)(x_1^2 + y_1^2 + r^2) - c^2(x_1^2 - y_1^2 - r^2) = O. \quad (31)$$

Rückt der Pol O_1 ins Unendliche, dann ist $c = \infty$, und man erhält aus der letzten Gleichung

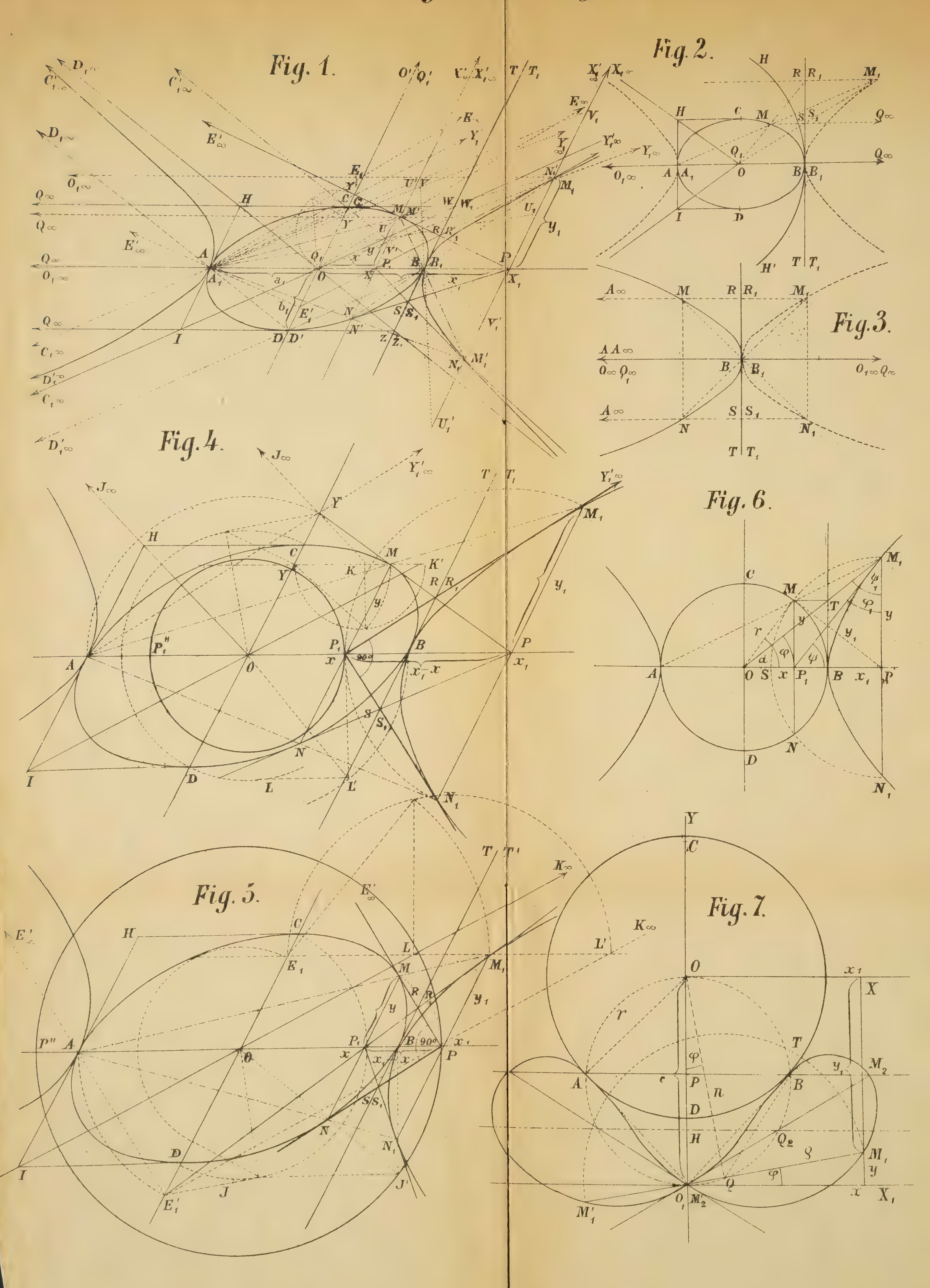
$$x_1^2 - y_1^2 - r^2 = O. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

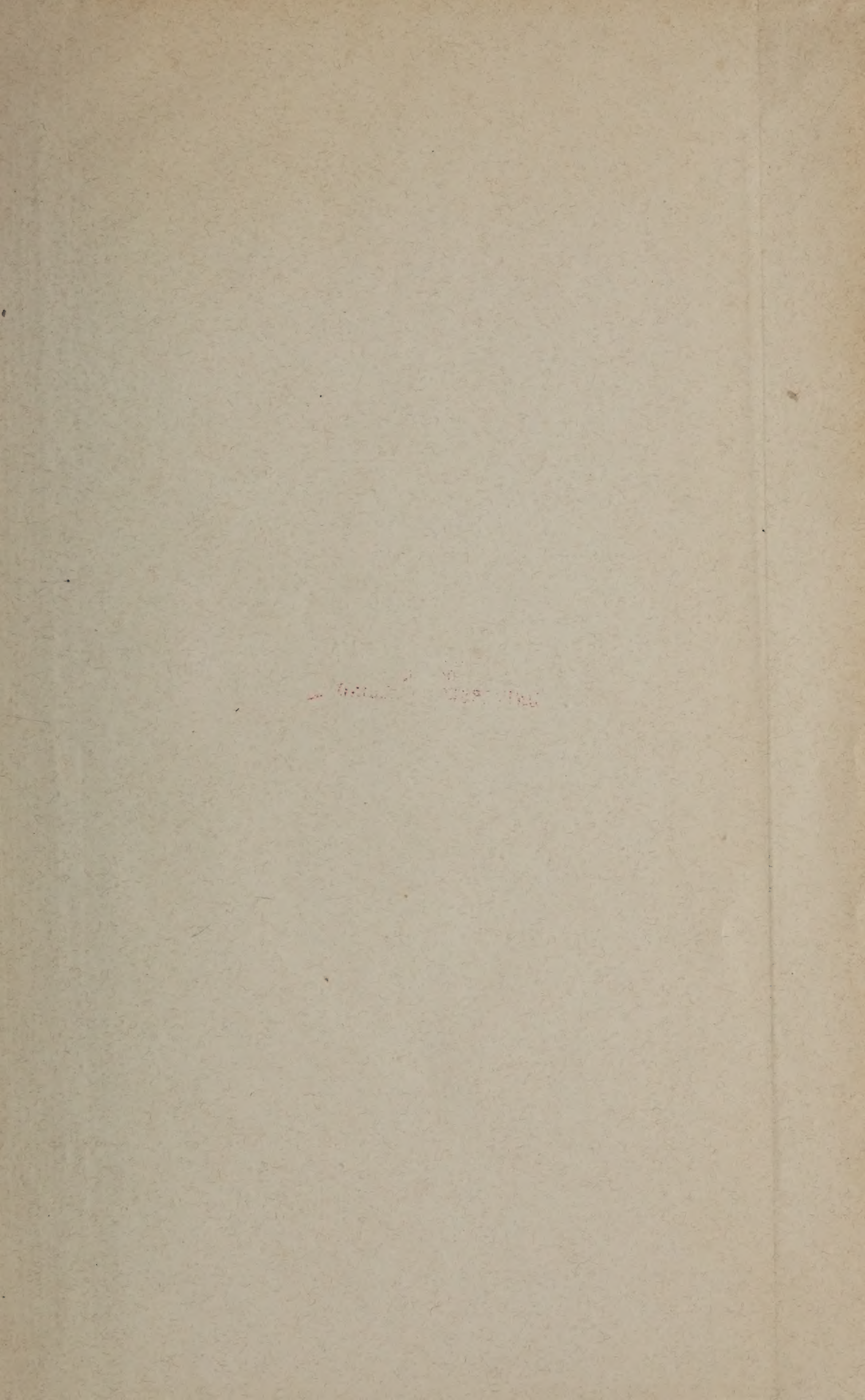
Die Curve spaltet sich also in diesem Falle in die gleichseitige Hyperbel (Fig. 6) und in die beiden Scheiteltangenten in A und in B. Denn die Polare AB wird bei dem Grenzübergange zum Durchmesser.

Wien, am 1. Mai 1892.

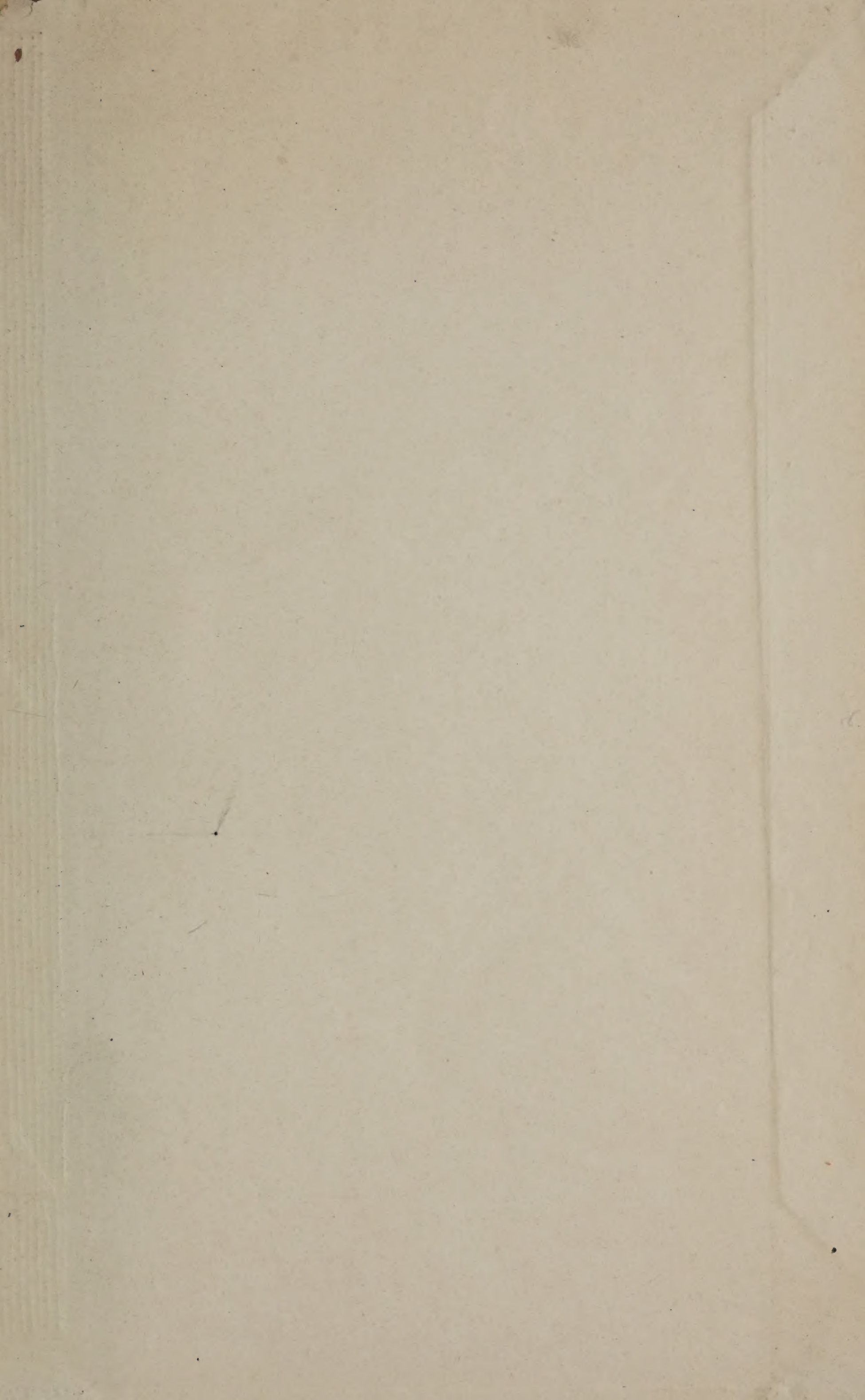
Adalbert Breuer.

Breuers „Imaginäre Kegelschnitte.“











UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
516.215B75I
C001
IMAGINARE KEGELSCHNITTE ERFURT
3 0112 017249290